# 7. Volumi dei solidi di rotazione

## Rotazione attorno all'asse x

Sia $f(x)$ una funzione continua e non negativa in $[a; b]$.

Il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse $x$ del trapezoide $D$ limitato dalla curva $y = f(x)$, dall'asse $x$, dalle rette $x = a$ e $x = b$ ( vedi fig. 1 ) è dato dalla formula

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

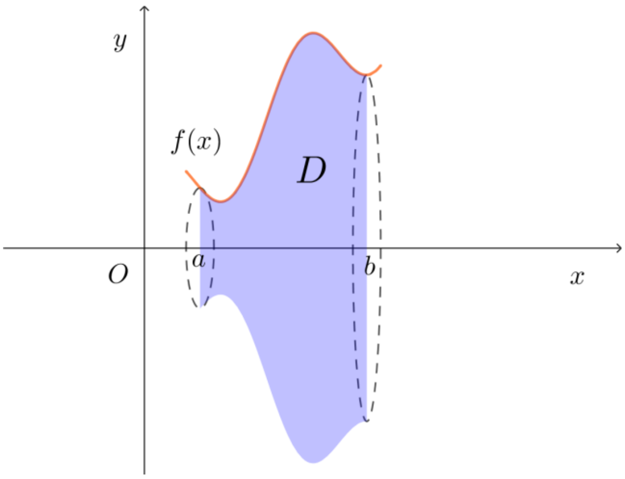



**Fig. 1**

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue e $0 \leq g(x) \leq f(x)$ in $[a; b]$ il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse $x$ del dominio $D$ delimitato dalle due curve e dalle rette $x = a$ e $x = b$ ( vedi fig. 2 ) è dato dalla formula

$$V_x = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx.$$

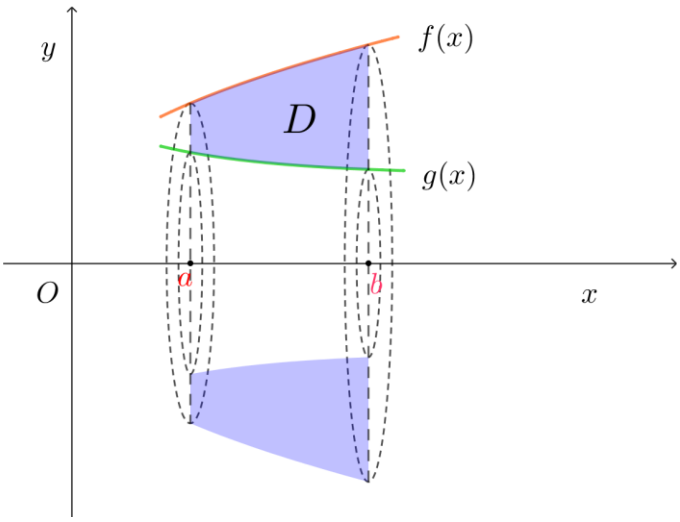



**Fig. 2**

## Rotazione attorno all'asse y

a) Sia $f(x)$ una funzione continua e positiva in $[a; b]$ , con $0 \leq a \leq b$ .

Il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse $y$ del trapezoide limitato dalla curva $y = f(x)$, dall'asse $x$, dalle rette $x = a$ e $x = b$ ( vedi fig. 3 ) è dato dalla formula

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

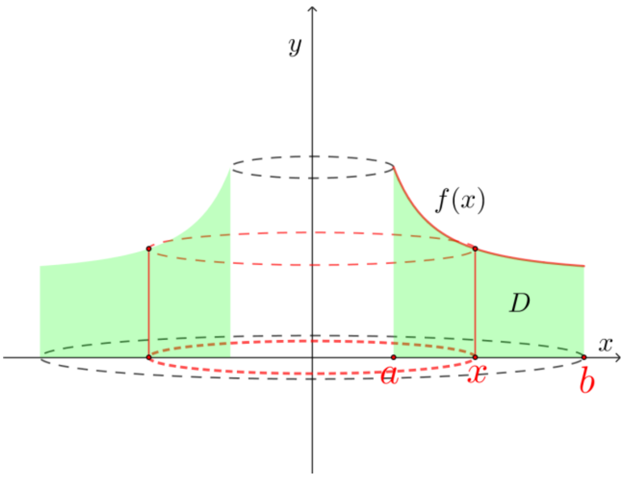



**Fig. 3**

b) Se $x = g(y)$ è una funzione continua e non negativa in $[c; d]$ , con $0 \leq c \leq d$. Il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse $y$ del trapezoide $D$ limitato dalla curva $x = g(y)$, dall'asse $y$ e dalle rette $y = c$ e $y = d$ ( vedi fig. 4) è dato dalla formula

$$V_y = \pi \int_c^d g(y)^2 dy$$

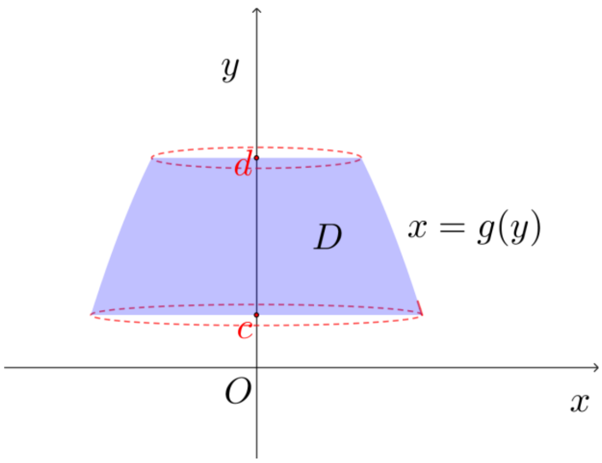



**Fig. 4**

**Esempi**

1) Consideriamo il dominio $D$ in figura delimitato dall'asse $x$ e dalla parabola $y = -2x^2 + 8x - 6$ ( fig. 5) e calcoliamo il volume del solido che si ottiene ruotandolo di un giro completo :

**a)** attorno all'asse $x$;
**b)** attorno all'asse $y$.

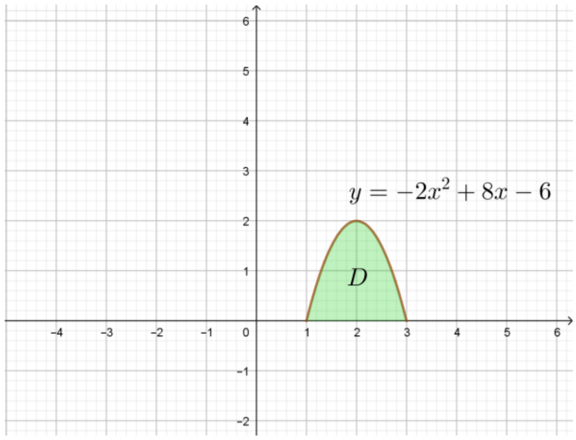



**Fig. 5**

**a)** $V_x = \pi \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)^2 dx = \frac{64}{15}\pi$
**b)** $V_y = 2\pi \int_1^3 x(-2x^2 + 8x - 6\,)dx = \frac{32}{3}\pi$

2) Sia $D$ il dominio delimitato dalla parabola $x = -y^2 + 4y + 1$, dall'asse $y$ e dalle rette $y = 0$ e $y = 4$ ( fig. 6) . Il volume $V_y$ ottenuto dalla rotazione del dominio $D$ attorno all'asse $y$ è dato da:

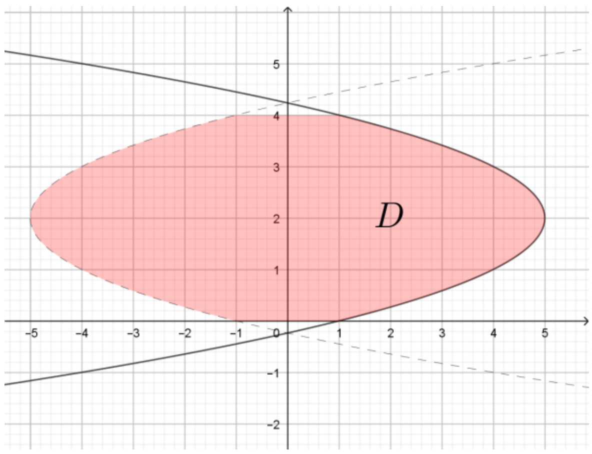



**Fig.6**

$V_y = \pi \int_0^4 (-y^2 + 4y + 1)^2 dy = \frac{892}{15}\pi$

**Esercizi**

**( gliesercizi con asterisco sono avviati )**

*1) Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa della regione delimitata dalla curva $y = \sqrt{x}$, dall'asse $x$ e dalle rette $x = 1$ e $x = 4$ attorno

a) all'asse $x$ ; b) all'asse $y$.

*2) Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa della regione delimitata dalla curva $y = \ sin^2 x$ e dall'asse $x$ con $0 \leq x \leq \pi$ attorno

a) all'asse $x$ ; b) all'asse $y$.

3) Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa della regione delimitata dalle curve $y = \ e^x$ e $y = e^{-x}$ e dalle rette $x = 0$ e $x = log2$ attorno

a) all'asse $x$ ; b) all'asse $y$.

*4) Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa della regione delimitata dalla curva $y = \ x^3$ e dall'asse $x$ con $-1 \leq x \leq 0$ attorno

a) all'asse $x$ ; b) all'asse $y$.

*5) Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa della regione delimitata dalla curva $y = \ e^{-x^2}$ e dall'asse $x$ con 0$\leq x \leq a$ attorno all'asse $y$.

Calcolare, inoltre, il limite di tale volume per $a \to +\infty$.

6) Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa della regione delimitata dalla curva $y = \frac{1}{x^2}$ e dall'asse $x$ con 1$\leq x \leq a$ attorno all'asse $x$ .

Calcolare, poi, il limite di tale volume per $a \to +\infty$.

7) Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa della regione delimitata dalla curva $y = \frac{1}{x^2}$ e dall'asse $x$ con $0 < a \leq x \leq 1$ attorno all'asse $y$ ; calcolare, poi, il limite di tale volume per $a \to 0^+$.

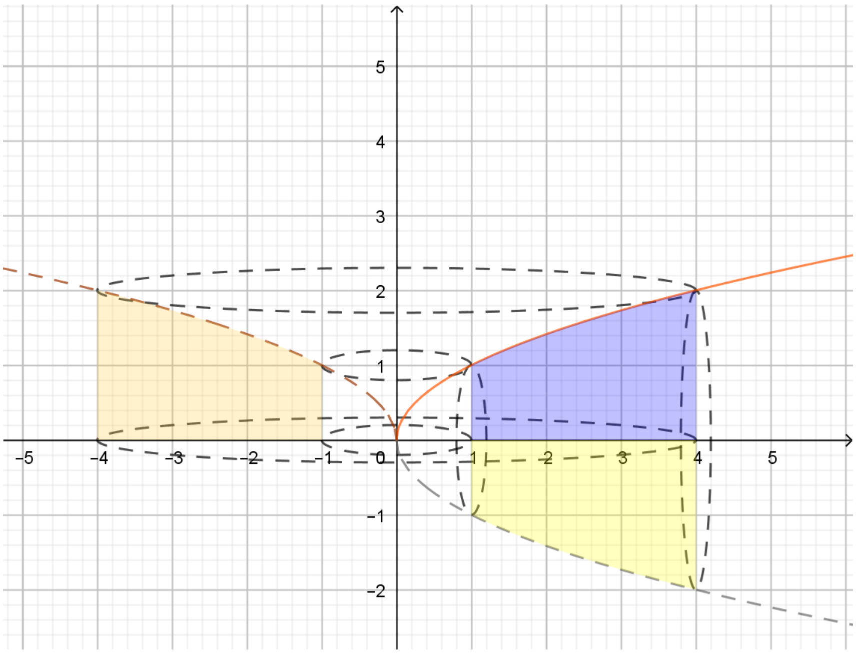
8) Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa della regione delimitata dalla curva $y = \ 2\sqrt{2x - x^2}$ e dall'asse $x$ con 0$\leq x \leq 2$ attorno all'asse $x$ .

*9) Calcolare il volume del toro generato dalla rotazione attorno all'asse $x$ del cerchio limitato dalla circonferenza $x^2 + (y - 2)^2 = 1$.

## Soluzioni

***1. S.** a) $\frac{15}{2}\pi$ ; b) $\frac{124}{5}\pi$ ; ( si ha $V_x = \pi\int_1^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_1^4 x dx = \frac{15}{2}\pi$ ;

$V_y = 2\pi\int_1^4 x\sqrt{x}dx = \frac{124}{5}\pi$ ( vedi figura );




***2. S.** a) $\frac{3}{8}\pi^2$ ; b) $\frac{\pi^3}{2}$ ;

( a) $V_x = \pi\int_0^\pi sin^4 x dx = \pi\int_0^\pi \left(\frac{1-cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi (1 - 2cos(2x) + cos^2 2x)dx =$

$= \frac{\pi}{4}\int_0^\pi \left(1 - 2cos(2x) + \frac{1+cos(4x))}{2}\right) dx = \cdots;$

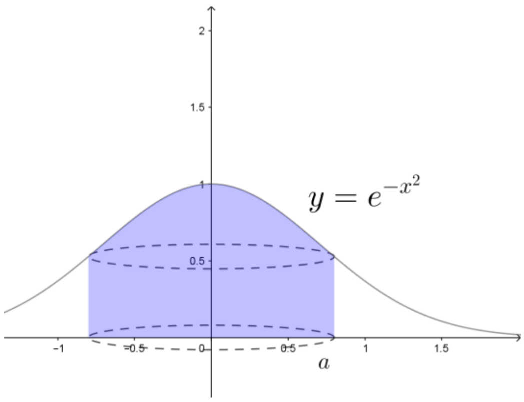
b) $V_y = 2\pi\int_0^\pi x sin^2 x\, dx = \pi\int_0^\pi x\left(1 - cos(2x)\right) dx$ ,

l'integrale $\int x cos(2x)\, dx$ si calcola per parti … ) ;

**3. S.** a) $\frac{9}{8}\pi$ ; b) $\pi(5log2 - 3)$ ;

***4. S.** a) $\frac{\pi}{7}$ ; b) $\frac{2}{5}\pi$ ; ( $V_y = 2\pi\int_{-1}^0 |x||x^3|dx = 2\pi\int_{-1}^0 x^4 dx$ … ) ;

***5. S.** $\pi\left(1 - e^{-a^2}\right)$ ; $\pi$ ; ( $V_y = 2\pi\int_0^a x e^{-x^2}\, dx = -\pi\int_0^a -2x e^{-x^2}\, dx = \cdots$




**6. S.** $\frac{\pi(a^3-1)}{3a^3}$ ; $\frac{\pi}{3}$ ; **7. S.** $-2\pi loga$ ; $+\infty$ ; **8. S.** $\frac{16}{3}\pi$ ;

***9. S.** $4\pi^2$ ; ( ottenute le due funzioni $y = 2 + \sqrt{1-x^2}$ e $y = 2 - \sqrt{1-x^2}$,

il volume è dato da ; $V_x = \pi \int_{-1}^{1} \left[\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right] dx =$

$= 16\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ ,

l'integrale geometricamente rappresenta l'area di un quarto di cerchio di raggio 1… ) ;