3. Integrali definiti per sostituzione

Esercizio risolto

$\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$

Poniamo: $e^x = t \quad \Rightarrow \quad x = logt \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{t}dt$

Sostituiamo e calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\int \frac{t-1}{t(t+1)}\,dt$$

Scomponiamo la funzione integranda:

$$\frac{t-1}{t(t+1)} = -\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1}$$

Pertanto si ha:

$$\int \frac{t-1}{t(t+1)}\,dt = -\int \frac{1}{t}dt + 2\int \frac{1}{t+1}\,dt = -logt + 2\log(t+1) + c$$

Ora si può procedere in due modi :

a) si risostituisce $e^x = t$, quindi si ha :
$\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = [-loge^x + 2log(e^x+1)]_0^1 = [-x + 2log(e^x+1)]_0^1 =$
$= -1 + 2log(e+1) - 2log2 = 2log\frac{e+1}{2} - 1$

b) si cambiano gli estremi d'integrazione trasformandoli in estremi in t :
essendo $e^x = t$ se $x = 0 \Rightarrow t = 1$, se $x = 1 \Rightarrow t = e$, pertanto si ha
$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int_1^e \frac{t-1}{t(t+1)}\,dt = [-logt + 2\log(t+1)]_1^e =$$
$$= -loge + 2log(e+1) - 2log2 = 2log\frac{e+1}{2} - 1$$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

*1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}-2}dx$ *2) $\int_0^{log2} e^{-x}\sqrt{e^{-x}+1}\,dx$

*3) $\int_0^4 xe^{\sqrt{x}}\,dx$ *4) $\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\,dx$

*5) $\int_0^1 (x + \sqrt{4+x^2}\,)dx$ ***6.** $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+cosx}dx$

Soluzioni

***1. S.** $2-4log2$; (porre $\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2$, $dx=2tdt;\ x=0\ \Rightarrow t=0,\ \ x=1 \Rightarrow t=1$
$\int_0^1 \frac{2t(t+1)}{t^2-t-2}dt=2\int_0^1\left(1+\frac{2(t+1)}{(t+1)(t-2)}\right)dt=2[t+2log|t-2|]_0^1=\cdots$) ;

***2.S.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}$; (porre $e^{-x}+1=t \Rightarrow x=-\log(t-1)\,, dx=-\frac{1}{t-1}$ dt

$x=0 \Rightarrow t=2, x=log2 \Rightarrow t=\frac{3}{2}$, $\int_2^{\frac{3}{2}}(t-1)\sqrt{t}\left(-\frac{1}{t-1}\right)dt=-\int_2^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}$ dt=...) ;

***3. S.** $4(e^2+3)$; (porre $\sqrt{x}=t$ poi integrare per parti) ;

***4.S.** $2+\pi$; (posto $x=2\sqrt{2}\,sint,\quad dx=2\sqrt{2}\,cost\ dt$, si ha

$\int_0^2\sqrt{8-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8-sin^2t}\ 2\sqrt{2}\,cost\ dt$ =$8\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos^2tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+cos2t)dt=..$)

***5. S.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}+log\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; (posto $\sqrt{4+x^2}+x=t\ \Rightarrow \sqrt{4+x^2}=t-x \Rightarrow x=\frac{t^2-4}{2t} \Rightarrow dx=\frac{t^2+4}{2t^2}dt,$

$x=0 \Rightarrow t=2,\ x=1 \Rightarrow t=1+\sqrt{5},\ \int_2^{1+\sqrt{5}}\left(t\cdot\frac{t^2+4}{2t^2}\right)dt=\cdots$);

***6.S.** $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (posto $tg\frac{x}{2}=t \Rightarrow x=2arctgt\ \Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$, cos$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{3}, x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$, da cui sostituendo e semplificando $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 dt=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$).