10. Funzioni crescenti e decrescenti- Massimi , minimi, flessi a tangente orizzontale

Sia f una funzione definita in $E \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione
Si dice **massimo** (**minimo**) della funzione il più grande (piccolo) dei valori che essa assume in E.

Definizione
Si dice che $x_0 \in E$ è **punto di massimo locale** o **relativo** per la funzione f se esiste un intorno $I \subset E$ di x_0 tale che :

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in I \cap E$$

Se per $x \neq x_0$ risulta

$$f(x) < f(x_0)$$

Il punto x_0 si dice **punto di massimo locale** o **relativo proprio**.
Analogamente :
Si dice che $x_0 \in E$ è **punto di minimo locale** o **relativo** per la funzione f se esiste un intorno $I \subset E$ di x_0 tale che :

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in I \cap E$$

Se per $x \neq x_0$ risulta

$$f(x) > f(x_0)$$

Il punto x_0 si dice **punto di minimo locale** o **relativo proprio**.

Il valore $f(x_0)$ si dice rispettivamente **massimo** o **minimo locale** o **relativo**.

Teorema
Se $x_0 \in (a; b)$ è un punto di massimo o minimo locale della funzione f e la funzione è derivabile in x_0 allora

$$f'(x_0) = 0$$

Definizione
Una funzione f si dice **crescente** (**decrescente**)in un intervallo $(a; b)$ se, presi comunque due punti x_1 e $x_2 \in (a; b)$, con $x_1 < x_2$ risulta

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (f(x_1) > f(x_2)\ )$$

Teorema
Una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, derivabile in ogni punto interno a tale intervallo e tale che sia :

$$f'(x) > 0 \qquad \forall x \in (a; b)$$

è **crescente** in $[a; b]$; se invece è :

$$f'(x) < 0 \qquad \forall x \in (a; b)$$

la funzione è **decrescente** in $[a; b]$.

Esempi

Determinare zeri e segno della derivata prima delle seguenti funzioni, studiando così la crescenza e decrescenza delle funzioni e eventuali massimi, minimi o flessi a tangente orizzontale:

1. $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$

La funzione è continua e derivabile $\forall x \neq -2$ e si ha:

$$f'(x) = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} \begin{cases} > 0 & \forall x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty) \\ = 0 & per\ x = -3 \vee x = -1 \\ < 0 & \forall x \in \ (-3; -2) \cup (-2; -1) \end{cases}$$

		-3		-2		-1	
f'	$+$	0	$-$	∞	$-$	0	$+$
f	↗		↘		↘		↗

Quindi $f(x)$ è decrescente in $(-3; -2) \cup (-2; -1)$, crescente in $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$

Da questo si deduce che :

- $x = -3$ è un punto di massimo relativo
- $x = -1$ è un punto di minimo relativo

  Essendo

  $f(-3) = -6 \qquad f(-1) = -2$

  I corrispondenti punti sul grafico hanno coordinate

  Massimo $(-3; -6)$ minimo $(-1; -2)$

2. $f(x) = x log^3 x$

La funzione è continua e derivabile $\forall x \in (0; +\infty)$ e si ha:

$$f'(x) = log^3 x + 3log^2 x = log^2 x(logx + 3) \begin{cases} > 0 & \forall x \in (e^{-3}; 1) \cup (1; +\infty) \\ = 0 & per\ x = e^{-3} \vee x = 1 \\ < 0 & \forall x \in \ (0; e^{-3}) \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ è decrescente in $(0; e^{-3})$, crescente in $(e^{-3}; 1) \cup (1; +\infty)$,

	0		e^{-3}		1	
f'		$-$	0	$+$	0	$+$
f		↘		↗		↗

Da questo si deduce che :

- $x = e^{-3}$ è un punto di minimo relativo
- $x = 1$ è ascissa di un punto di flesso a tangente orizzontale.

Essendo

$f(e^{-3}) = -27e^{-3}$ $\quad f(1) = 0$

I corrispondenti punti sul grafico hanno coordinate

Minimo $(e^{-3}; -27e^{-3})$ Flesso $(1; 0)$

Esercizi

(gli esercizi con asterisco sono avviati)

*1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

*2) $f(x) = (8x-1)^6$

*3) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2$

*4) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - x^3$

*5) $f(x) = \frac{125}{729}(x-2)^3(x+1)^2$

*6) $f(x) = \frac{x^2-x}{1+x^2}$

*7) $f(x) = x^2 + 2 + \frac{x^3}{4-x}$

*8) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2+x}$

*9) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x}}$

*10) $f(x) = sinx(1 + cosx)$ per $x \in [0; 2\pi]$

*11) $f(x) = 2e^x - e^{2x}$

*12) $f(x) = e^x + e^{-2x} + 1$

*13) $f(x) = xe^{4-x^2}$

*14) $f(x) = log^2(x+1) - 2log(x+1)$

*15)$f(x) = \frac{3}{4}log(e^{2x} + 2) - \frac{x}{2}$

*16) $f(x) = 3xlogx$

*17) $f(x) = \frac{1}{x^2}logx$

*18) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}logx$

*19) $f(x) = arctg(x^4 - x^3)$

*20) $f(x) = arctg(x^2 + 1)$

Metodo delle derivate successive

Sia f una funzione derivabile in $(a;b)$ quante volte occorre. Si ha il seguente :

Teorema

Se nel punto $x_0 \in (a;b)$ sono verificate le seguenti condizioni :

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

si avrà uno dei seguenti casi :

a) se n è ***pari*** e
   $f^{(n)}(x_0) < 0$ il punto x_0 è di **massimo** locale
   $f^{(n)}(x_0) > 0$ il punto x_0 è di **minimo** locale

b) se n è ***dispari*** il punto x_0 è ascissa di un punto di **flesso** a tangente orizzontale
   $f^{(n)}(x_0) > 0$ *flesso ascendente*
   $f^{(n)}(x_0) < 0$ *flesso discendente*

Esempi

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2$

la funzione è dotata di derivate di ogni ordine in $\mathbb{R}$. Calcoliamo gli zeri della derivata prima :

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 4x = 0$ per $x = -2, x = 0,\ x = \frac{1}{2}$,

Calcoliamo in tali punti la derivata seconda :

$f''(x) = 12x^2 + 12x - 4$

$f''(-2) = 20 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$ è punto di **minimo relativo**

$f''(0) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ è punto di **massimo relativo**

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$ è punto di **minimo relativo**

b) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - x^3$

la funzione è dotata di derivate di ogni ordine in $\mathbb{R}$. Calcoliamo gli zeri della derivata prima :

$f'(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0 \qquad$ per $x = -1 , x = 3, x = 0$

Calcoliamo in tali punti la derivata seconda :

$f''(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x$

$f''(-1) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$ è punto di **massimo relativo**

$f''(3) = 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$ è punto di **minimo relativo**

Poiché

$f''(0) = 0$

calcoliamo in zero la derivata terza:

$f'''(x) = 12x^2 - 12x - 6$

$f'''(0) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ è ascissa di un punto di **flesso** *a tangente orizzontale discendente*

c) $f(x) = sinx(1 + cosx)$ per $x \in [0; 2\pi]$

la funzione è dotata di derivate di ogni ordine in $[0; 2\pi]$. Si ha

$f'(x) = (cosx + 1)(2cosx - 1) = 0$ per $x = \frac{\pi}{3}$; $x = \frac{5}{3}\pi$; $x = \pi$

$f''(x) = sinx(-4cosx - 1)$

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}$ è punto di **massimo relativo**

$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5\pi}{3}$ è punto di **minimo relativo**

$f''(\pi) = 0$

calcoliamo la derivata terza in π :

$f'''(x) = -8cos^2x - cosx + 4$

$f'''(\pi) = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi$ è ascissa di un punto di **flesso** *a tangente orizzontale discendente*

Esercizi

*1) $f(x) = (x - 1)^2(x - 2)$

*2) $f(x) = ex^2 - logx$

*3) $f(x) = e^x(1 - 2x)$

*4) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$

Soluzioni

***1.S.** $f'(x) = 6x - 2 = 0$ per $x = \frac{1}{3}$;

f crescente in $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$, decrescente in $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$; $x = \frac{1}{3}$ punto di minimo relativo : $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$;

***2.S.** $f'(x) = 48(8x - 1)^5 = 0$ per $x = \frac{1}{8}$;

f crescente in $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$, decrescente in $\left(-\infty; \frac{1}{8}\right)$; $x = \frac{1}{8}$ punto di minimo relativo ; $\left(\frac{1}{8}; 0\right)$;

***3.S.** $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 4x = 0$

per $x = 0, x = -2, x = \frac{1}{2}$; f crescente in $(-2; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$,

decrescente in $(-\infty; -2) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$; $x = -2$ punto di min locale : $(-2; -8)$,

$x = 0$ punto di max locale : $(0; 0)$, $x = \frac{1}{2}$ punto di min locale : $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{16}\right)$;

***4.S.** $f'(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$ per $x = -1, 0, 3$;

f crescente in $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$, decrescente in $(-1; 0) \cup (0; 3)$;

$x = -1$ punto di massimo relativo : $\left(-1; \frac{3}{10}\right)$, $x = 3$ punto di minimo relativo : $\left(3; -\frac{189}{10}\right)$,

$(0; 0)$ punto di flesso a tangente orizzontale;

***5.S.** $f'(x) = \frac{125}{729}(x - 2)^2(x + 1)(5x - 1) = 0$ per $x = -1, x = \frac{1}{5}, x = 2$;

f crescente in $(-\infty; -1)\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$; decrescente in $\left(-1; \frac{1}{5}\right)$;

$x = \frac{1}{5}$ punto di minimo relativo ; $\left(\frac{1}{5}; -\frac{36}{25}\right)$;

$x = -1 \text{punto di massimo relativo}$ (-1;0) , flesso(2;0);

***6.S.** $f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(1+x^2)^2} = 0$ per $x = \mp\sqrt{2} - 1$;

f crescente in $(-\infty; -\sqrt{2} - 1) \cup (\sqrt{2} - 1; +\infty)$, decrescente in $(-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1)$;

$x = -\sqrt{2} - 1$ punto di max locale : $\left(-\sqrt{2} - 1; \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$,

$x = \sqrt{2} - 1$ punto di minimo locale : $\left(\sqrt{2} - 1; \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$;

***7.S.** $f'(x) = \frac{64}{(4-x)^2} - 4 = 0$ per $x = 0, x = 8$;

f crescente in $(0; 4) \cup (4; 8)$; decrescente in $(-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$;

minimo $(0; 2)$, massimo (8;-62);

***8.S.** $f'(x) = \frac{2-x}{2\sqrt{x}(x+2)^2} = 0$ per $x = 2$;

f crescente in $[0;2)$; decrescente in $(2;+\infty)$; massimo $\left(2;\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$;

***9.S.** $f'(x)=\frac{-3x-2}{2x^2\sqrt{(1+x)^3}}=0$ per $x=-\frac{2}{3}$;

f crescente in $\left(-1;-\frac{2}{3}\right)$, decrescente in $\left(-\frac{2}{3};0\right)\cup(0;+\infty)$;

$x=-\frac{2}{3}$ punto di max. rel. : $\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$;

***10.S.** $f'(x)=(cosx+1)(2cosx-1)=0$ per $x=\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$;

f crescente in $[0;\frac{\pi}{3})\cup(\frac{5}{3}\pi;2\pi]$, decrescente in $\left(\frac{\pi}{3};\pi\right)\cup\left(\pi;\frac{5}{3}\pi\right)$;

$x=\frac{\pi}{3}$ punto di max. rel. : $\left(\frac{\pi}{3};\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$; $x=\frac{5}{3}\pi$ punto di min. rel. : $\left(\frac{5\pi}{3};-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$:

$(\pi;0)$ punto di flesso a tangente orizzontale ;

***11.S.** $f'(x)=2e^x-2e^{2x}=0$ per $x=0$;

f crescente in $(-\infty;0)$; decrescente in $(0;+\infty)$; massimo $(0;1)$;

***12.S.** $f'(x)=e^x-2e^{-2x}=0$ per $x=log\sqrt[3]{2}$;

f crescente per $x>log\sqrt[3]{2}$, decrescente per $x<log\sqrt[3]{2}$;

$x=log\sqrt[3]{2}$ punto di min. rel. : $\left(log\sqrt[3]{2};\frac{3\sqrt[3]{2}+2}{2}\right)$;

***13.S.** $f'(x)=e^{4-x^2}(1-2x^2)=0$ per $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$;

f crescente in $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; decrescente in $(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}})\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$;

minimo $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{7}{2}}\right)$, massimo$\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{7}{2}}\right)$;

***14.S.** $f'(x)=\frac{2(log(x+1)-1)}{x+1}=0$

per $x=e-1$; f crescente in $(e-1;+\infty)$, decrescente in $(-1;e-1)$,

$x=e-1$ punto di min relativo : $(e-1;-1)$;

***15.S.** $f'(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+2}=0$ per $x=0$;

f crescente per $x>0$, decrescente per $x<0$; $x=0$ punto di min. rel. : $\left(0;\frac{3}{4}log3\right)$;

***16.S.** $f'(x)=3(logx+1)=0$ per $x=\frac{1}{e}$;

f decrescente in $\left(0;\frac{1}{e}\right)$; crescente in $(\frac{1}{e};+\infty)$; minimo $\left(\frac{1}{e};-\frac{3}{e}\right)$;

***17.S.** $f'(x) = \frac{1-2logx}{x^3} = 0$ per $x = \sqrt{e}$;

f crescente in $\left(0; \sqrt{e}\right)$; decrescente in $(\sqrt{e}; +\infty)$; massimo $\left(\sqrt{e}; \frac{1}{2e}\right)$;

***18.S.** $f'(x) = \frac{2-logx}{2x\sqrt{x}} = 0$ per $x = e^2$;

f crescente in $(0; e^2)$; decrescente in $e^2 ; +\infty)$; massimo $\left(e^2 ; \frac{2}{e}\right)$;

***19.S.** $f'(x) = \frac{x^2(4x-3)}{(x^4-x^3)^2+1} = 0$ per $x = 0$ e $x = \frac{3}{4}$;

f crescente in $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$, decrescente in $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{3}{4}\right)$;

$x = \frac{3}{4}$ punto di min. rel. : $\left(\frac{3}{4}; -arctg\frac{27}{256}\right)$; $(0; 0)$ punto di flesso a tangente orizzontale ;

***20.S.** $f'(x) = \frac{2x}{1+(x^2+1)^2} = 0$ per $x = 0$;

f decrescente in $(-\infty; 0)$; crescente in $(0 ; +\infty)$; minimo $\left(0 ; \frac{\pi}{4}\right)$;

Metodo delle derivate successive

***1.S.** $f'(x) = (x-1)(3x-5) = 0$ per x=1 e $x = \frac{5}{3}$,

$f''(x) = 6x - 8$; $f''(1) < 0$; $f''\left(\frac{5}{3}\right) > 0$; Massimo (1;0); minimo$\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{27}\right)$;

***2.S.** $x > 0$; $f'(x) = 2ex - \frac{1}{x} = 0$ per x= $\frac{1}{\sqrt{2e}}$

$f''(x) = 2e + \frac{1}{x^2}$; $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$>0 , Minimo$\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}; 1 + log\sqrt{2}\right)$;

***3.S.** $f'(x) = e^x(-2x-1) = 0$ per x= $-\frac{1}{2}$

$f''(x) = e^x(-2x-3)$; $f''\left(-\frac{1}{2}\right)$<0, Massimo$\left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$;

***4. S.** $f'(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2-1)}{x^2} = 0$ per x= $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$f''(x) = \frac{2e^{x^2}(2x^4-x^2+1)}{x^3}$; $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$ $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$

massimo$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2e}\right)$; minimo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2e}\right)$;